

Ministerul Educației și Cercetării

MIRCEA GANGA

MATEMATICĂ

MANUAL PENTRU CLASA A X - A

TRUNCHI COMUN + CURRICULUM DIFERENȚIAT

EDITURA MATHPRESS



1. MULȚIMI DE NUMERE	5
1.1. Numere reale	5
1.2. Mulțimea numerelor complexe.....	31
Probleme propuse.....	72
2. FUNCȚII ȘI ECUAȚII	89
2.1. Recapitulare funcții	89
2.2. Funcții injective, surjective, bijective	109
2.3. Funcții numerice particulare.....	127
Probleme propuse.....	202
3. METODE DE NUMĂRARE	227
3.1. Metoda inducției matematice.....	227
3.2. Reguli generale ale combinatoricii	235
3.3. Numărul de funcții	240
3.4. Mulțimi finite ordonate	241
3.5. Permutări.....	241
3.6. Aranjamente.....	247
3.7. Combinări	250
3.9. Binomul lui Newton.....	260
Probleme propuse.....	267
4. MATEMATICI FINANCIARE	282
4.1. Matematici financiare	282
4.2. Elemente de statistică matematică	296
4.3. Calculul probabilităților.....	303
4.4. Variabile aleatoare	330
Probleme propuse.....	346
5. GEOMETRIE	355
5.1. Reper cartezian în plan. Coordonate carteziene	355
5.2. Distanța între două puncte	358
5.3. Operații cu vectori legați. Coordonatele unui vector în plan	359
5.4. Ecuația dreptei în plan	365
5.5. Condiții de paralelism a două drepte din plan	375
5.6. Coliniaritatea a trei puncte	377
5.7. Condiții de perpendicularitate a două drepte	378
5.8. Calcule de distanțe. Arii	379
Probleme propuse.....	383
Teste de recapitulare finală	391
INDICAȚII ȘI RĂSPUNSURI	407

În acest capitol sunt prezentate cele două mulțimi importante de numere: mulțimea numerelor reale și mulțimea numerelor complexe.

Pentru prima mulțime sunt ilustrate proprietățile puterilor cu exponent real ale unui număr pozitiv. Se detaliază proprietățile radicalilor de ordin n și a operațiilor cu aceștia. Se definește logaritmul dintr-un număr pozitiv și apoi se dau principalele proprietăți ale acestora precum și operațiile cu logaritmi.

Pentru a doua mulțime, sunt prezentate cele două posibilități de exprimare ale unui număr complex: forma algebrică și forma trigonometrică. Se dau interpretări geometrice pentru operațiile cu numere complexe, făcându-se analogie cu operațiile cu vectori în cazul numerelor complexe sub formă algebrică, iar pentru numerele complexe sub formă trigonometrică se apelează la transformări geometrice.

• Numere reale	5	• Forma algebrică a unui număr complex	32
• Puteri cu exponent natural	5	• Reprezentarea geometrică a numerelor complexe	47
• Puteri cu exponent rațional	7	• Forma trigonometrică a unui număr complex	54
• Puteri cu exponent irațional și real	10	• Rădăcinile de ordin n dintr-un număr complex	66
• Radicali de ordin n	12	• Probleme propuse	72
• Logaritmi	23		
• Mulțimea numerelor complexe	31		

1.1. NUMERE REALE.

1.1.1. Puteri cu exponent natural

Vom reaminti noțiunea de putere a unui număr real.

Pentru $a \in \mathbb{R}$ și $n \in \mathbb{N}^*$, $n \geq 2$ are loc următoarea:

Definiție. Se numește **puterea n a lui a** , notată a^n (citim: a la n), produsul lui a cu el însuși de n ori,

$$a^n = \underbrace{a \cdot a \cdot \dots \cdot a}_n$$

a^n = putere, a = baza puterii, n = exponentul puterii.

Convenție: $a^0 = 1$, dacă $a \neq 0$, 0^0 nu are sens; $a^1 = a$.

Reamintim aici principalele proprietăți ale puterilor cu exponent natural.

1) **Înmulțirea puterilor care au aceeași bază:** $x^m \cdot x^n = x^{m+n}$, $x \in \mathbb{R}$, $m, n \in \mathbb{N}^*$. La înmulțirea a două puteri cu aceeași bază se scrie baza și se adună exponenții.

2) **Împărțirea puterilor care au aceeași bază:**

$$\frac{x^m}{x^n} = x^{m-n}, x \neq 0, m, n \in \mathbb{N}, m \geq n$$

Pentru a împărți două puteri care au aceeași bază, se scrie baza și se scad exponenții.

3) **Puterea produsului:** $(xy)^n = x^n y^n$, $x, y \in \mathbb{R}$, $n \in \mathbb{N}^*$.

Pentru a ridica un produs la o putere, se ridică fiecare factor la acea putere.

4) **Puterea câtului:** $\left(\frac{x}{y}\right)^n = \frac{x^n}{y^n}$, $\forall x, y \in \mathbb{R}, y \neq 0, n \in \mathbb{N}^*$

Pentru a ridica un cât la o putere, se ridică la acea putere atât numărătorul cât și numitorul.

5) **Ridicarea unei puteri la altă putere:**

$$(x^m)^n = x^{mn}, \forall x \in \mathbb{R}, m, n \in \mathbb{N}^*.$$

Pentru a ridica o putere la altă putere, se scrie baza și se înmulțesc exponenții.

Exemple

$$1) 2^3 \cdot 2^5 = 2^{3+5} = 2^8; \quad 2) 3^5 : 3^3 = 3^{5-3} = 3^2 = 9; \quad 3) (2 \cdot 3)^6 = 2^6 \cdot 3^6;$$

$$4) \left(\frac{2}{3}\right)^4 = \frac{2^4}{3^4} = \frac{16}{81}; \quad 5) (3^2)^3 = 3^{2 \cdot 3} = 3^6.$$

6) Să se determine numerele naturale n pentru care, pe rând:

$$a) 4 < 2^n < 16; \quad b) \frac{1}{8} > \left(\frac{1}{2}\right)^n > \frac{1}{32}$$

R. a) Inegalitățile se rescriu $2^2 < 2^n < 2^4$. Cum $x = 2 > 1$, se impune $2 < n < 4$.

Deci $n = 3$.

$$b) \left(\frac{1}{2}\right)^3 > \left(\frac{1}{2}\right)^n > \left(\frac{1}{2}\right)^5. \text{ De aici } 3 < n < 5, \text{ adică } n = 4.$$

1.1.2. Puteri cu exponent întreg negativ

Reamintim noțiunea de putere cu exponent întreg negativ.

Definiție. Fie $a \in \mathbb{R}$, $a \neq 0$, $n \in \mathbb{N}^*$. Se numește puterea $(-n)$ a lui a , notată a^{-n} , numărul real definit prin:

$$a^{-n} = \frac{1}{a^n}.$$

Dacă $n = 1$, atunci $a^{-1} = \frac{1}{a}$ reprezintă inversul lui a .

Și pentru puterile cu exponent întreg negativ, rămân valabile proprietățile puterilor cu exponent natural prezentate mai sus, cu amendamentul că, pentru proprietatea a doua, de împărțire a două puteri, nu mai avem restricția $m \geq n$, ea fiind valabilă $\forall m, n \in \mathbb{Z}$.

Exemple

$$1) 3^3 \cdot 3^{-5} = 3^{3-5} = 3^{-2} = \frac{1}{3^2} = \frac{1}{9}; \quad 2) 2^5 : 2^8 = 2^{5-8} = 2^{-3} = \frac{1}{2^3} = \frac{1}{8};$$

$$3) \left(\frac{1}{2} \cdot \frac{3}{5}\right)^{-4} = \left(\frac{1}{2}\right)^{-4} \left(\frac{3}{5}\right)^{-4} = 2^4 \cdot \left(\frac{5}{3}\right)^4 = \frac{2^4 \cdot 5^4}{3^4} = \frac{(2 \cdot 5)^4}{3^4} = \frac{10^4}{3^4};$$

$$4) \left(\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}}\right)^3 = \frac{(\sqrt{2})^3}{(\sqrt{3})^3} = \frac{2\sqrt{2}}{3\sqrt{3}};$$

$$5) (3^{-3})^2 = 3^{(-3)2} = 3^{-6} = \frac{1}{3^6}; \quad ((\sqrt{5})^3)^{-2} = \sqrt{5}^{-6} = \frac{1}{\sqrt{5}^6} = \frac{1}{125}.$$

1.1.3. Puteri cu exponent rațional

În paragraful precedent am definit puterile cu exponent natural și întreg și am văzut că aceste numere reale au următoarele proprietăți:

$$1) a^m \cdot a^n = a^{m+n}, \forall m, n \in \mathbb{Z}^*; \quad 2) \frac{a^m}{a^n} = a^{m-n}, \forall a \neq 0, \forall m, n \in \mathbb{Z};$$

$$3) (ab)^m = a^m b^m, \forall m, n \in \mathbb{Z}^*; \quad 4) \left(\frac{a}{b}\right)^m = \frac{a^m}{b^m}, \forall a, b \neq 0, \forall m \in \mathbb{Z};$$

$$5) (a^m)^n = a^{mn}, \forall a \neq 0, \forall m, n \in \mathbb{Z}; \quad 6) a^0 = 1, a \neq 0;$$

$$7) a^{-m} = \frac{1}{a^m}, \forall a \neq 0, \forall m \in \mathbb{Z}.$$

Se demonstrează următoarea:

Lemă. 1) Fie $x, y \geq 0, n \in \mathbb{N}^*$. Atunci: $x^n = y^n \Leftrightarrow x = y$.

2) Fie $x, y \in \mathbb{R}, n \in \mathbb{R}, n \in \mathbb{N}, n$ impar. Atunci: $x^n = y^n \Leftrightarrow x = y$.

Utilizând radicalii vom extinde noțiunea de putere și pentru exponenți raționali. De aici, în particular, se deduc puterile cu exponent natural și întreg precum și radicalii.

Definiție. Fie $a > 0$ și $r = \frac{m}{n}, m \in \mathbb{Z}, n \in \mathbb{N}^*, n \geq 2$. Atunci se numește puterea r a lui a numărul notat a^r și egal cu: $a^r = a^{\frac{m}{n}} = \sqrt[n]{a^m}$.

În simbolul a^r , a se numește **baza** puterii, iar r se numește **exponentul** puterii.

Dacă $m = 1, n \geq 2$, atunci $a^{\frac{1}{n}} = \sqrt[n]{a}$.

Observație. Am văzut că numărul rațional $\frac{m}{n}$ este o clasă de fracții echivalente cu $\frac{m}{n}$. Arătăm că punând în locul lui $\frac{m}{n}$ o fracție echivalentă $\frac{p}{q}$, deci pentru care $\frac{m}{n} = \frac{p}{q}$, adică $mq = pn$, numărul $a^{\frac{p}{q}}$ este egal cu numărul $a^{\frac{m}{n}}$. (Se spune că definiția puterii nu depinde de alegerea reprezentanților).

Într-adevăr avem: $a^{\frac{m}{n}} = \sqrt[n]{a^m} = \sqrt[n]{a^{mq}} = \sqrt[n]{a^{pn}} = \sqrt[n]{a^p} = \sqrt[n]{a^{\frac{p}{q}}}$.

Exemple. $8^{\frac{2}{3}} = \sqrt[3]{8^2} = \sqrt[3]{(2^3)^2} = \sqrt[3]{2^6} = 2^2 = 4$;

$$27^{-\frac{2}{3}} = \frac{1}{27^{\frac{2}{3}}} = \frac{1}{\sqrt[3]{27^2}} = \frac{1}{\sqrt[3]{3^6}} = \frac{1}{9}.$$

Proprietățile puterilor cu exponenți raționali

Aceleași proprietăți întâlnite la puterile cu exponent întreg au loc și pentru puterile cu exponenți raționali. Mai precis are loc următoarea:

Teoremă. Fie $a, b > 0$, $r, s \in \mathbb{Q}$. Atunci:

$$\begin{aligned} 1) a^r \cdot a^s &= a^{r+s}; & 2) \frac{a^r}{a^s} &= a^{r-s}; & 3) (ab)^r &= a^r \cdot b^r; \\ 4) \left(\frac{a}{b}\right)^r &= \frac{a^r}{b^r}; & 5) (a^r)^s &= a^{rs}. \end{aligned}$$

Demonstrație. Vom demonstra proprietățile 1) și 3) pentru celelalte procedându-se analog. Pentru demonstrarea acestor proprietăți utilizăm lema prezentată mai sus.

1) Fie $r = \frac{p}{q}$, $s = \frac{m}{n}$, $p, m \in \mathbb{Z}$, $q, n \in \mathbb{N}$, $q, n \geq 2$. Atunci $a^r a^s = a^{\frac{p}{q}} a^{\frac{m}{n}}$.

Considerăm:

$$\begin{aligned} [a^{\frac{p}{q}} a^{\frac{m}{n}}]^{qn} &= (a^{\frac{p}{q}})^{qn} (a^{\frac{m}{n}})^{qn} \text{ (conform proprietății unei puteri cu exponent natural)} \\ &= [(a^{\frac{p}{q}})^q]^n [(a^{\frac{m}{n}})^n]^q \text{ (conform proprietății unei puteri cu exponent natural)} \\ &= [(\sqrt[q]{a^p})^q]^n [(\sqrt[n]{a^m})^n]^q \text{ (definiția puterii cu exponent rațional)} \\ &= (a^p)^n (a^m)^q \text{ (definiția radicalului de ordin } q \text{ și respectiv } n) \\ &= a^{pn} \cdot a^{mq} \text{ (conform proprietății unei puteri cu exponent întreg)} \\ &= a^{pn+mq} \text{ (conform proprietății unei puteri cu exponent întreg)} \\ &= (\sqrt[nq]{a^{pn+mq}})^{nq} \text{ (definiția radicalului de ordin } nq) \\ &= (a^{\frac{pn+mq}{nq}})^{nq} \text{ (definiția puterii cu exponent rațional)} \end{aligned}$$

Dar $\frac{pn+mq}{nq} = \frac{p}{q} + \frac{m}{n} = r + s$ și deci am arătat că $(a^r \cdot a^s)^{qn} = (a^{r+s})^{nq}$.

Conform lemei rezultă că $a^r \cdot a^s = a^{r+s}$.

3) Fie $r = \frac{p}{q}$, $p \in \mathbb{Z}$, $q \in \mathbb{N}$, $q \geq 2$. Avem:

$$\begin{aligned} [(ab)^{\frac{p}{q}}]^q &= [\sqrt[q]{(ab)^p}]^q \text{ (definiția puterii cu exponent rațional)} \\ &= (ab)^p \text{ (definiția radicalului de ordin } q) \\ &= a^p b^p \text{ (conform proprietății unei puteri cu exponent întreg)} \end{aligned}$$

$$= (\sqrt[q]{a^p})^q (\sqrt[q]{b^q})^q \text{ (definiția radicalului de ordin } q)$$

$$= (a^{\frac{p}{q}})^q (b^{\frac{q}{q}})^q \text{ (definiția puterii cu exponent rațional)}$$

$$= (a^{\frac{p}{q}} b^{\frac{q}{q}})^q \text{ (conform proprietății unei puteri cu exponent natural).}$$

Deci $[(ab)^r]^q = [a^r b^r]^q$. Conform lemei la care am făcut referire la începutul demonstrației rezultă $(ab)^r = a^r b^r$. ■

Exemple

1) Să se scrie numerele sub formă de puteri cu exponent rațional: $\sqrt{3}$, $\sqrt[5]{3^5}$, $\sqrt{5^{-2}}$.

2) Să se scrie numerele $3^{\frac{1}{2}}$, $5^{\frac{1}{3}}$, $7^{\frac{2}{5}}$, $4^{0,25}$ cu ajutorul radicalilor.

3) Să se arate că $\sqrt{\sqrt{3}}(\sqrt[3]{\sqrt{3}} : \sqrt[4]{\sqrt{3}})^2 = 3^{\frac{1}{4}}$.

R. 1) $\sqrt{3} = 3^{\frac{1}{2}}$; $\sqrt[5]{3^5} = 3^{\frac{5}{5}} = 3^1 = 3$; $\sqrt{5^{-2}} = 5^{-\frac{2}{2}} = 5^{-1} = \frac{1}{5}$.

2) $3^{\frac{1}{2}} = \sqrt{3}$, $5^{\frac{1}{3}} = \sqrt[3]{5}$, $7^{\frac{2}{5}} = \sqrt[5]{7^2} = \sqrt[5]{49}$, $4^{0,25} = 4^{\frac{1}{4}} = \sqrt[4]{4} = \sqrt[4]{2^2} = \sqrt{2}$.

3) Se scriu radicalii ca puteri cu exponent rațional și avem:

$$\sqrt{\sqrt{3}} = \sqrt[4]{3} = 3^{\frac{1}{4}}, \sqrt[3]{\sqrt{3}} = \sqrt[6]{3} = 3^{\frac{1}{6}}, \sqrt[4]{\sqrt{3}} = \sqrt[8]{3} = 3^{\frac{1}{8}}. \text{ Membrul stâng devine:}$$

$$3^{\frac{1}{4}}(3^{\frac{1}{6}} : 3^{\frac{1}{8}})^2 = 3^{\frac{1}{4}}(3^{\frac{1}{6} - \frac{1}{8}})^2 = 3^{\frac{1}{4}}(3^{\frac{1}{24}})^2 = 3^{\frac{1}{4}}3^{\frac{2}{24}} = 3^{\frac{1}{4}}3^{\frac{1}{12}} = 3^{\frac{1}{4} + \frac{1}{12}} = 3^{\frac{1}{3}} = 3^{\frac{1}{4}}.$$

Ordonarea a două puteri cu exponent rațional

Are loc următoarea:

Teoremă. 1) Dacă $a > 1$, atunci $a^r < a^s \Leftrightarrow r < s$, $r, s \in \mathbb{Q}$.

2) Dacă $0 < a < 1$, atunci $a^r < a^s \Leftrightarrow r > s$, $r, s \in \mathbb{Q}$.

Demonstrație. Probăm 1); pentru 2) se procedează asemănător.

Fie $r = \frac{p}{q}$, $s = \frac{m}{n}$, $p, m \in \mathbb{Z}$, $q, n \in \mathbb{N}$, $q, n \geq 2$. Atunci:

$$a^{\frac{p}{q}} < a^{\frac{m}{n}} \Leftrightarrow (a^{\frac{p}{q}})^{qn} < (a^{\frac{m}{n}})^{qn} \text{ (ordonarea a două puteri cu exponent natural)}$$

$$\Leftrightarrow [(\sqrt[q]{a^p})^q]^n < [(\sqrt[n]{a^m})^n]^q \text{ (definiția puterii cu exponent rațional)}$$

$$\Leftrightarrow (a^p)^n < (a^m)^q \text{ (definiția radicalului de ordin } q \text{ și respectiv } n)$$

$$\Leftrightarrow a^{pn} < a^{mq} \text{ (proprietatea unei puteri cu exponent întreg)}$$

$$\Leftrightarrow pn < mq \Leftrightarrow \frac{p}{q} < \frac{m}{n} \Leftrightarrow r < s. \blacksquare$$

Exemplu. Să se arate că pentru orice $a, b > 0$ are loc inegalitatea:

$$a^{\frac{1}{3}} + b^{\frac{1}{3}} > (a+b)^{\frac{1}{3}}.$$

R. Punem $a+b=c$ și rescriem inegalitatea sub forma (se împarte cu $c^{\frac{1}{3}}$):

$$\left(\frac{a}{c}\right)^{\frac{1}{3}} + \left(\frac{b}{c}\right)^{\frac{1}{3}} > 1. \text{ Avem } 0 < \frac{a}{c}, \frac{b}{c} < 1, \frac{a}{c} + \frac{b}{c} = 1 \text{ și deci } \left(\frac{a}{c}\right)^{\frac{1}{3}} < 1, \left(\frac{b}{c}\right)^{\frac{1}{3}} < 1 \text{ sau}$$

$$\left(\frac{a}{c}\right)^{1-\frac{2}{3}} < 1 \text{ și } \left(\frac{b}{c}\right)^{1-\frac{2}{3}} < 1. \text{ De aici } \frac{a}{c} < \left(\frac{a}{c}\right)^{\frac{2}{3}}, \frac{b}{c} < \left(\frac{b}{c}\right)^{\frac{2}{3}}. \text{ Adunând, membru cu membru, aceste ultime două inegalități rezultă}$$

$$1 = \frac{a}{c} + \frac{b}{c} < \left(\frac{a}{c}\right)^{\frac{4}{3}} + \left(\frac{b}{c}\right)^{\frac{4}{3}}$$

Altfel. Se pune $a^{\frac{1}{3}} = x > 0$, $b^{\frac{1}{3}} = y > 0$ și inegalitatea devine:

$x^2 + y^2 > (x^3 + y^3)^{\frac{2}{3}}$ sau prin ridicare la cub a ambilor membri:

$(x^2 + y^2)^3 > (x^3 + y^3)^2$ sau după unele calcule $3x^4y^2 + 3x^2y^4 > 2x^3y^3$ sau (prin împărțire cu x^3y^3) $3\left(\frac{x}{y} + \frac{y}{x}\right) > 2$, ceea ce-i evident deoarece $\frac{x}{y} + \frac{y}{x} \geq 2$, dacă $x, y > 0$.

1.1.4. Puteri cu exponent irațional și real

În acest paragraf, dorim să extindem puterile cu exponent rațional la puteri cu exponent real. Această ultimă extensie, necesită o abordare diferită de cea utilizată până acum și depășește cadrul manualului de față. De aceea, ne mulțumim să ilustrăm principiul cu ajutorul unui exemplu.

Să presupunem că trebuie să definim $a^{\sqrt{2}}$, în cazul în care $a > 1$.

Reamintim că, în anul precedent, pentru a defini operațiile cu numere iraționale, am utilizat aproximările prin lipsă și prin adaos pentru numerele considerate. La fel vom proceda pentru a ridica pe a la o putere irațională (aici $\sqrt{2}$). Avem aproximările, prin lipsă și adaos

$$1 < 1,4 < 1,41 < 1,414 < \dots < \sqrt{2} < \dots < 1,415 < 1,42 < 1,5 < 2$$

Ținând seamă de proprietățile puterilor cu exponent rațional de bază $a > 1$, avem șirurile de inegalități:

$$a^1 < a^{1,4} < a^{1,41} < a^{1,414} < \dots \quad (1)$$

și

$$a^2 > a^{1,5} > a^{1,42} > a^{1,415} > \dots \quad (2).$$

În inegalitățile (1) și (2), există o infinitate de termeni și fiecare termen din (1) este mai mic decât orice termen din (2).

Este firesc ca numărul $a^{\sqrt{2}}$ să fie acel număr care este mai mare decât oricare termen din (1) și mai mic decât oricare termen din (2).

Aceasta înseamnă că numărul $a^{\sqrt{2}}$ poate fi considerat acel număr γ care este mai mare decât a , la orice putere rațională care să aproximeze pe $\sqrt{2}$ prin lipsă și care este mai mic decât a la orice putere rațională care să aproximeze pe $\sqrt{2}$ prin adaos.

Vom accepta aici, fără demonstrație, că acest număr există și este unic (el fiind situat „la punctul de întâlnire” al celor două șiruri):

$$a^1 < a^{1,4} < a^{1,41} < a^{1,414} < \dots < \gamma < \dots < a^{1,415} < a^{1,42} < a^{1,5} < a^2.$$

În același mod, se poate defini a^α , $a > 1$ cu α un număr irațional pozitiv.

Această definiție poate fi reformulată și astfel: Fie $a > 1$ și α un număr irațional pozitiv. Considerăm r_i un număr rațional, care-l aproximează pe α prin lipsă, iar l_k un număr rațional, care îl aproximează pe α prin adaos. Atunci a^α este acel număr γ , pentru care

$$a^{r_i} < \gamma < a^{l_k}, \forall r_i, \forall l_k.$$

Vom accepta că un astfel de număr există și este unic.

Analog, dacă $0 < a < 1$, cu notațiile de mai sus, prin a^α vom înțelege acel număr γ pentru care:

$$a^{r_i} > \gamma > a^{l_k}, \forall r_i, \forall l_k.$$

Vom accepta că un astfel de număr există și este unic.

Dacă $a > 0$, $a \neq 1$, iar α este un număr irațional negativ, atunci prin a^α vom înțelege acel număr care este egal cu $\frac{1}{a^{|\alpha|}}$, adică:

$$a^\alpha = \frac{1}{a^{-\alpha}}.$$

Observații. 1) Dacă $a = 1$, atunci $1^\alpha = 1, \forall \alpha \in \mathbb{R}$.

2) Ținând seama de definiția puterii cu exponent rațional $a^\alpha > 0, \forall a > 0, \alpha \in \mathbb{R}$.

3) Proprietățile valabile la puterile cu exponent rațional rămân valabile și aici (pentru demonstrarea lor fiind necesar conceptul de limită de la analiza matematică). Pentru orice $a > 0, b > 0$ și orice $x, y \in \mathbb{R}$ avem:

$$\begin{aligned} 1) a^x \cdot a^y &= a^{x+y}; & 2) \frac{a^x}{a^y} &= a^{x-y}; & 3) (ab)^x &= a^x b^x; & 4) \left(\frac{a}{b}\right)^x &= \frac{a^x}{b^x}; \\ 5) (a^x)^y &= a^{xy}; & 6) a^0 &= 1; & 7) a^{-x} &= \frac{1}{a^x}. \end{aligned}$$

Ordonarea puterilor

Dacă $a > 1$, atunci din $x < y \Rightarrow a^x < a^y$.

Dacă $0 < a < 1$, atunci din $x < y \Rightarrow a^x > a^y$.

4) Ținând seama de ultimele comentarii de la paragraful precedent privind valorile pe care le ia $a^{\frac{m}{n}}$, putem afirma că:

1°) dacă $a > 1$, atunci $a^\alpha > 1 \Leftrightarrow \alpha > 0$ și $a^\alpha < 1 \Leftrightarrow \alpha < 0$;

și

2°) dacă $0 < a < 1$, atunci $a^\alpha > 1 \Leftrightarrow \alpha < 0$ și $a^\alpha < 1 \Leftrightarrow \alpha > 0$.

Să arătăm că, dacă $a > 1, \alpha > 0$, atunci $a^\alpha > 1$.

Dacă $\alpha = \frac{m}{n}, m, n \in \mathbb{N}^*, n \geq 2$, atunci $a^{\frac{m}{n}} > 1 \Leftrightarrow (a^{\frac{m}{n}})^n > 1 \Leftrightarrow a^m > 1$, ceea ce este evident ($a > 1 \Rightarrow a^2 > a \Rightarrow a^3 > a^2 \Rightarrow \dots$).

Dacă α este irațional, atunci considerăm r un număr rațional pozitiv care aproximează prin lipsă pe α . Deci $a^\alpha > a^r$ (din definiția puterii cu exponent irațional). Dar am văzut mai sus că $a^r > 1$. Din $a^\alpha > a^r, a^r > 1$, deducem $a^\alpha > 1$.

5) Ordonarea puterilor cu exponent real. Are loc următorul rezultat:

1) Dacă $a > 1$, atunci $\alpha_1 < \alpha_2 \Leftrightarrow a^{\alpha_1} < a^{\alpha_2}$.

2) Dacă $0 < a < 1$, atunci $\alpha_1 < \alpha_2 \Leftrightarrow a^{\alpha_1} > a^{\alpha_2}$.

Să probăm că, dacă $a > 1$ și $\alpha_1 > \alpha_2$, atunci $a^{\alpha_1} > a^{\alpha_2}$.

Fie $\beta = \alpha_1 - \alpha_2 > 0$. Conform cu 4), $a^\beta > 1$. De aici, prin înmulțire cu a^{α_2} rezultă $a^\beta a^{\alpha_2} > a^{\alpha_2} \Leftrightarrow a^{\alpha_1} > a^{\alpha_2}$. Din 1) și 2) se deduce următorul rezultat important:

Dacă $a > 0, a \neq 1$, atunci $a^{\alpha_1} = a^{\alpha_2} \Leftrightarrow \alpha_1 = \alpha_2$.

1.1.5. Radicali de ordin n

Ca și în celelalte situații discutate până acum, vom defini noțiunea de radical de ordin n ($n \in \mathbb{N}^*$, $n \geq 2$, n par și n impar) dintr-un număr (nenegativ, dacă n par și real oarecare, dacă n este impar).

Istoric. Noțiunea de rădăcină.

Încă din antichitate grecii și-au pus problema de a determina latura pătratului de arie dată, de exemplu 2 m^2 .

Problema este ușoară dacă aria x^2 (unde x este latura pătratului) are valori ca 4 m^2 , 9 m^2 , 16 m^2 etc., adică atunci când este pătratul unui număr întreg. Din $x^2 = 2^2$ sau din $x^2 = 3^2$ rezultă $x = 2$ și respectiv $x = 3$. Dar pentru cazul general al ariei egale cu un număr real pozitiv oarecare, atunci nu s-a găsit nici o soluție generală.

Într-un Dialog Platonian, Socrate îi arată lui Menon, printr-o lungă explicație geometrică, că diagonala unui pătrat de latură egală cu 1 este la rândul ei latura unui pătrat de arie egală cu 2. Astăzi, conținutul geometric al dialogului cu Menon a fost concentrat în expresia că latura x a unui pătrat de arie egală cu 2 este $x = \sqrt{2}$. În aceasta simbolul $\sqrt{2}$ (se citește rădăcina de ordinul doi, sau rădăcina pătrată din 2), care determină pe x trebuie să îndeplinească condiția ca, înmulțit cu el însuși, sau ceea ce este totuna, ridicat la pătrat să dea valoarea 2.

În unele cazuri, găsirea lui x prin condiția de mai sus este ușor de rezolvat: de exemplu $x = \sqrt{4} = 2$, $x = \sqrt{9} = 3$, $x = \sqrt{16} = 4$, $x = \sqrt{0,0144} = 0,12$, ceea ce se verifică imediat, dacă se face proba $x^2 = 2^2 = 4$, $x^2 = 3^2 = 9$, $x^2 = 4^2 = 16$, $x^2 = 0,12^2 = 0,0144$.

În mod analog, problema delică a matematicienilor greci antici a condus către rădăcina de ordinul trei sau cubică; ei căutau latura unui cub de volum egal cu dublul volumului cubului cu latura 1. Astăzi această problemă se reduce la forma: latura x a unui cub de volum egal cu 2 trebuie să fie numărul $x = \sqrt[3]{2}$ (se citește rădăcina de ordinul trei sau rădăcina cubică din 2), a cărei putere a treia trebuie să fie 2, $x^3 = 2$. Această condiție este iarăși, în unele cazuri, ușor de rezolvat. De exemplu $x = \sqrt[3]{8} = 2$ sau $x = \sqrt[3]{0,125} = 0,5$ deoarece $x^3 = 2^3 = 8$ și respectiv $x^3 = 0,5^3 = 0,125$.

Extragerea rădăcinii (latinește **radix**, rădăcină) este operația inversă ridicării la putere în mulțimea numerelor pozitive.

Radicali de ordinul 2

Pentru orice număr real a am văzut că $a^2 \geq 0$. Se pune problema invers: pentru un număr pozitiv a , există x număr real astfel încât $x^2 = a$? Altfel spus dacă $a \geq 0$, ecuația $x^2 = a$ are soluție reală?

Se demonstrează că: **orice număr real nenegativ a este pătratul unui unic număr real nenegativ.**

Existența numărului $x \geq 0$ pentru care $x^2 = a$ se demonstrează la cursul de analiză matematică.

Unicitatea numărului x . Presupunem că există $x, y \geq 0$ cu proprietatea $x^2 = y^2 = a$. Să arătăm că $x = y$. Avem: $x^2 - y^2 = (x - y)(x + y) = 0$. De aici $x - y = 0$ sau $x + y = 0$. Din $x - y = 0$ rezultă $x = y$, iar din $x + y = 0$ și $x, y \geq 0$ se obține $x = y = 0$. Deci în final $x = y$.

Numărul x se notează $x = \sqrt{a}$ și se numește radical de ordin 2 din a .

Definiție. (Rădăcina pătrată) Fie $a \geq 0$. Se numește radical de ordinul 2 din a (sau încă rădăcină pătrată din a), numărul notat $\sqrt{a}$ (citim: radical de ordin 2 din a) cu proprietățile:

$$\sqrt{a} \geq 0, \quad (\sqrt{a})^2 = a.$$

Prin urmare radical de ordin 2 din a este unicul număr pozitiv $\sqrt{a}$ care ridicat la pătrat este egal cu a .

Operația de găsim a lui $\sqrt{a}$ se numește extragerea rădăcinii pătrate din a .

Observații. 1) Să reținem că: rădăcina pătrată se poate extrage numai din numere pozitive.

Scrierea $\sqrt{x+1}$ există dacă $x+1 \geq 0$, adică $x \geq -1$.

2) Din $a \geq 0$, avem $\sqrt{a} \geq 0$ și deci $\sqrt{x^2} = |x| \geq 0$. Exemplu: $\sqrt{(-2)^2} = |-2| = 2$;
 $\sqrt{(1-\sqrt{2})^2} = |1-\sqrt{2}| = \sqrt{2}-1$.

Radicali de ordinul 3

Dacă $a \in \mathbb{R}$, atunci $a^3 \in \mathbb{R}$. Mai mult dacă $a > 0$, atunci $a^3 > 0$, iar dacă $a < 0$, atunci $a^3 < 0$. Invers dat fiind un număr real a , există $x \in \mathbb{R}$ pentru care $x^3 = a$? Aceasta este problema care ne interesează. Dacă $a = 27$, atunci $x = 3$, deoarece $3^3 = 27$. Dacă $a = -8$, atunci $x = -2$ pentru că $(-2)^3 = -8$. Cel puțin din aceste exemple se constată că pentru un număr negativ a , numărul x al cărui cub este egal cu a este tot negativ. Dacă $a > 0$, atunci numărul x având cubul egal cu a este de asemenea pozitiv. În continuare formulăm următoarea:

Definiție (Rădăcina cubică). Fie $a \in \mathbb{R}$. Se numește radical de ordinul 3 din a (sau încă rădăcină cubică din a), numărul real notat $\sqrt[3]{a}$ cu proprietatea:

$$(\sqrt[3]{a})^3 = a.$$

Dacă $a \in \mathbb{R}$, atunci $\sqrt[3]{a} \in \mathbb{R}$ și $(\sqrt[3]{a})^3 = a$.

Prin urmare radical de ordinul 3 din a este unicul număr real $\sqrt[3]{a}$ care ridicat la cub este egal cu a .

Radicali de ordinul n

Vom generaliza problemele abordate mai sus în cazul $a \in \mathbb{R}$, $n \in \mathbb{N}^*$, $n \geq 2$, n număr par sau număr impar.

Dacă $a \geq 0$ și n este număr natural par, atunci se arată că ecuația $x^n = a$, are o unică soluție pozitivă, notată $x = \sqrt[n]{a}$ și numită rădăcina aritmetică de ordinul n din a .

Dacă $a \in \mathbb{R}$ și n este număr natural impar, atunci se arată că ecuația $x^n = a$, are o unică soluție reală, notată $x = \sqrt[n]{a}$ și numită radicalul de ordinul n din a .

Formulăm următoarea:

Definiție. (Radicalul de ordinul n) 1) Fie $a \geq 0$ și $n \in \mathbb{N}^*$, n par. Se numește radical de ordinul n din a (sau rădăcină aritmetică de ordinul n din a) numărul notat $\sqrt[n]{a}$ cu proprietățile:

$$\sqrt[n]{a} \geq 0, \quad (\sqrt[n]{a})^n = a.$$

2) Fie $a \in \mathbb{R}$, $n \in \mathbb{N}^*$, $n \geq 3$, n impar. Se numește radical de ordinul n din a numărul real notat $\sqrt[n]{a}$ cu proprietatea:

$$(\sqrt[n]{a})^n = a.$$

Numărul n se numește **ordinul** radicalului; a este numărul de sub radical.

Convenție. Dacă $n = 2$, atunci $\sqrt[2]{a}$ se notează simplu $\sqrt{a}$.

Exemple. $\sqrt[4]{16} = 2$ deoarece $2^4 = 16$; $\sqrt[5]{-32} = -2$ pentru că $(-2)^5 = -32$;
 $\sqrt[3]{-\frac{27}{8}} = -\frac{3}{2}$ pentru că $\left(-\frac{3}{2}\right)^3 = -\frac{27}{8}$.

1.1.6. Proprietăți ale radicalilor

Aceste proprietăți descriu comportarea radicalilor față de produs, cât, putere, etc. și oferă facilități pentru calculele numerice sau algebrice.

Pentru demonstrarea lor intervin rezultatele din următoarea

Lemă. 1) Fie $x, y \geq 0$, $n \in \mathbb{N}^*$. Atunci $x^n = y^n \Leftrightarrow x = y$.

2) Fie $x, y \in \mathbb{R}$, $n \in \mathbb{N}$, n impar. Atunci $x^n = y^n \Leftrightarrow x = y$.

Prezentăm aceste proprietăți ale radicalilor după cele două cazuri ale ordinelor radicalilor, pari sau impari. **Recomandăm, pentru fixarea acestora, formularea proprietăților pentru cazurile particulare $n = 2$ (ordin par) și $n = 3$ (ordin impar), deoarece multe din aplicații conțin radicali de ordinul 2 și 3.** Desemnăm prin m, n ordinele radicalilor, iar $a, b \in \mathbb{R}$.

R1) Radicalul produsului este egal cu produsul radicalilor.

n =număr natural par	n =număr natural impar
$\sqrt[n]{ab} = \begin{cases} \sqrt[n]{a} \sqrt[n]{b}, \forall a, b \geq 0 \\ \sqrt[n]{ a } \sqrt[n]{ b }, \forall a \cdot b \geq 0 \end{cases}$	$\sqrt[n]{ab} = \sqrt[n]{a} \sqrt[n]{b}, \forall a, b \in \mathbb{R}.$